Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo Junio 2012 común

Sea f : R $\rightarrow$ R la función definida como $f(x) = e^x.(x - 2)$.
(a) [1 punto] Calcula la asíntotas de f.
(b) [1 punto] Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
(c) [0'5 puntos] Determinan, si existen, los puntos de inflexión de la gráfica de f.

Solución

(a)
Estudia las asíntotas de la gráfica de la función $f(x) = e^x.(x - 2)$.

x = a es una asíntota vertical (A.V.) de f(x) si $\lim_{x\to a+} [(f(x)] = \infty$
Vemos que no tiene A.V. porque no existe ningún número que anule el denominador (no hay denominador), y tampoco tenemos funciones logarítmicas.

x = b es una asíntota horizontal (A.H.) de f(x) si $\lim_{x\to\pm\infty} [(f(x)] = b$

Como $\lim_{x\to+\infty} [(f(x)] = \lim_{x\to+\infty} [e^x.(x - 2)] = e^{+\infty}.(+\infty) = +\infty$, f no tiene A.H. en $+\infty$.

(Regla de L`Hôpital, L'H. Si f y g son funciones con derivada continua, f(a) = g(a) = 0, y existe $\lim_{x\to a} [(f'(x) / g'(x)]$, entonces $\lim_{x\to a} [(f(x) / g(x)] = \lim_{x\to a} [(f'(x) / g'(x)]$. Se puede aplicar cuando $x \rightarrow \infty$, y también si obtenemos ∞/∞ en el cálculo del límite.)

Como $\lim_{x\to -\infty} [(f(x)] = \lim_{x\to+\infty} [e^{-x}.(-x - 2)] = \lim_{x\to+\infty} [.(-x - 2)/ e^x)] = (-\infty/\infty$, L'H) =
$= \lim_{x\to+\infty} [.(-1)/ e^x)] = 1/\infty = 0$, luego f tiene la recta **y = 0 como A.H.** en $-\infty$.

No asíntota oblicua (A.O.)

Como $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - 0)] = 0^-$, f(x) está por debajo de la A.H. en $-\infty$ (le damos a x el valor -100)
(b)
Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de f '(x).

$f(x) = e^x.(x - 2)$
$f'(x) = e^x.(x - 2) + e^x.(1) = e^x.(x - 1)$

Si f '(x) = 0; tenemos(x – 1) = 0 (e^x no se anula nunca) , de donde x = 1, que puede ser el extremo relativo.

Como $f'(0) = e^0.(- 1) < 0$, $f'(x) < 0$ en $x < 1$, luego f(x) es estrictamente decreciente en $x < 1$.

Como $f'(2) = e^2.(1) > 0$, $f'(x) > 0$ en $x > 1$, luego f(x) es estrictamente creciente en $x > 1$.

Por definición en x = +1 hay un mínimo relativo que vale $f(1) = e^1.(1 - 2) = - e$.
(c)
Determinan, si existen, los puntos de inflexión de la gráfica de f.
Me están pidiendo el estudio de la segunda derivada.
$f(x) = e^x.(x - 2)$
$f'(x) = e^x.(x - 1)$

$f''(x) = e^x.(x - 1) + e^x.(1) = e^x.(x)$

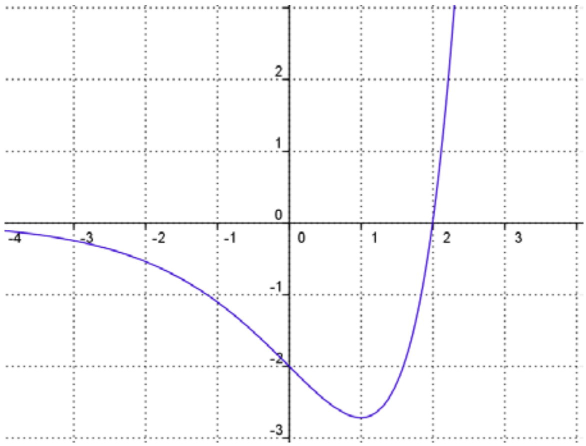
Si f ''(x) = 0; tenemos x = 0 (e^x no se anula nunca), que puede ser el punto de inflexión.

Como f ''(-1) = e^{-1}.(-1) < 0, f''(x) < 0 en x < 0, luego f(x) es cóncava (∩) en x < 0.

Como f ''(1) = e^{1}.(1) > 0, f''(x) > 0 en x > 0, luego f(x) es convexa (∪) en x > 0.

Por definición en x = 0 hay un punto de inflexión que vale f(0) = e^0.(– 2) = - 2.

Aunque no lo piden un esbozo de la gráfica es :



Ejercicio 2 opción A, modelo Junio 2012 común

Sea f una función continua en el intervalo [2,3] y F una primitiva de f tal que F(2) = 1 y F(3) = 2, Calcula:

(a) [0'75 puntos] $\int_2^3 f(x)dx$ (b) [0'75 puntos] $\int_2^3 (5f(x)-7)dx$

(c) [1 punto] $\int_2^3 (F(x))^2 f(x)dx$.

Solución

(a)

$\int_2^3 f(x)dx$

Como F es una primitiva de f, tenemos F(x) = $\int f(x)dx$

$\int_2^3 f(x)dx$ = $[F(x)]_2^3$ = F(3) – F(2) = 2 – 1 = 1.

(b)

Como F es una primitiva de f, tenemos F(x) = $\int f(x)dx$

$\int_2^3$ (5f(x) – 7)dx = 5·$\int_2^3$ f(x)dx – 7·$\int_2^3$ dx = $[5\cdot F(x) - 7x]_2^3$ = (5F(3) – 7(3)) – (5F(2) – 7(2)) =
= 10 – 21 – 5 + 14 = – 2.

Como F es una primitiva de f, tenemos F(x) = $\int f(x)dx$

$\int_2^3 f(x)dx$ = $[F(x)]_2^3$ = F(3) – F(2) = 2 – 1 = 1.

(c)

$\int_2^3 (F(x))^2 f(x)dx$.

Como F es una primitiva de f, tenemos F(x) = $\int f(x)dx$ y además F'(x) = f(x)

$\int_2^3 (F(x))^2 .f(x)dx = \int_2^3 (F(x))^2 .F'(x)dx = [(F(x))^3/3]_2^3 = (F(3))^3/3 – (F(2))^3/3 = 2^3/3 – 1^3/3 = 7/3.$

Ejercicio 3 opción A, modelo Junio 2012 común

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] ¿ Para qué valores del parámetro k no existe la matriz inversa de la matriz A? Justifica la respuesta.
(b) [1’5 puntos] Para k = 0, resuelve la ecuación matricial $(X + I).A = A^t$, donde I de nota la matriz identidad y A^t la matriz traspuesta de A.

Solución

(a)
¿ Para qué valores del parámetro k no existe la matriz inversa de la matriz A? Justifica la respuesta.
La matriz A no tiene inversa si su determinante (| A |) es igual a cero.

Calculamos el determinante desarrollando por el adjunto de la primera fila.

$$| A | = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix} = 1.(2k - 1).$$

De **|** A **|** = 0 tenemos si 2k - 1 = 0, es decir k = 1/2.
La matriz **A no tiene inversa si k = 1/2**.
(b)
Para k = 0, resuelve la ecuación matricial $(X + I).A = A^t$, donde I de nota la matriz identidad y A^t la matriz traspuesta de A.

Como para k = 0, la matriz A tiene inversa, podemos multiplicar por la derecha por la inversa de la matriz A, la expresión $(X + I).A = A^t$.
$(X + I).A.\ A^{-1} = A^t.\ A^{-1} \rightarrow (X + I).I = A^t.\ A^{-1} \rightarrow X + I = A^t.\ A^{-1}$, de donde $\mathbf{X = A^t.\ A^{-1} - I}$

Calculamos ya $A^{-1} = (1 /| A |).Adj(A)^t$.
Como **|** A **|** = 1.(2k - 1), para k = 0, tenemos | A **|** = 1.(-1) = -1.

Como $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$, para k = 0, tenemos $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$Adj(A)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = (1/-1).\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, luego la matriz pedida es:

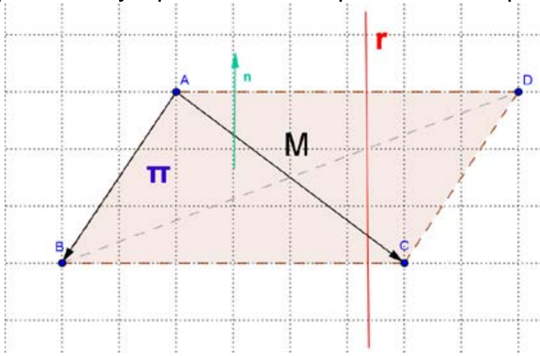
$$\mathbf{X = A^t.\ A^{-1} - I} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4 opción A, modelo Junio 2012 común

De un paralelogramo ABCD conocemos tres vértices consecutivos
A(2,-1,0), B(-2,1,0) y C(0,1,2).
(a) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.
(b) [0’75 puntos] Halla el área de dicho paralelogramo.
(c) [0’75 puntos] Calcula el vértice D.

Solución

Vamos a realizar un pequeño dibujo que nos servirá para los tres apartados.



(a)

Calcula la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.

A(2,-1,0), B(-2,1,0) y C(0,1,2).

Sabemos que el centro del paralelogramo es el punto M donde se cortan las diagonales del paralelogramo, el cual coincide con el punto medio de una de ellas, por ejemplo la AC.

M((2+0)/2, (-1+1)/2, (0+2)/2 = M(1,0,1)

Un vector director de la recta "r" es uno perpendicular al plano, luego nos puede servir el producto vectorial (x) de los vectores **AB** y **AC**.

$$\mathbf{u} = \mathbf{n} = \mathbf{AB}\times\mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(4) - \mathbf{j}(-8) + \mathbf{k}(-4) = (4,8,-4)$$

AB = (-4,2,0); **AC** = (-2,2,2).

La ecuación de "r" en forma continua es: **r ≡ (x-1)/4 = (y-0)/8 = (z-1)/(-4)**

(b)

Halla el área de dicho paralelogramo.

Sabemos que el área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial de dos vectores con origen común, por ejemplo **||ABxAD||**, sin embargo por ser un paralelogramo observamos que su área es el doble del triángulo ABC, que es la mitad del área del paralelogramo que determinan los vectores **AB** y **AC**, es decir:

Área paralelogramo = 2.(1/2.||**AB**x**AC**||) = $\sqrt{(4^2 + 8^2 + 4^2)} = \sqrt{(96)}$ u.a. , puesto que el vector **AB**x**AC** ya lo teníamos del apartado (a).

(c)

Calcula el vértice D.

Para obtener D podemos utilizar que los vectores **BA** y **CD** son iguales, luego sus coordenadas también lo son.

A(2,-1,0), B(-2,1,0) y C(0,1,2).

BA = - **AB** = -(-4,2,0) = (4,-2,0).

CD = (x-0,y-1,z-2). Igualando tenemos:

x-0 = 4, de donde x = 4

y-1 = -2, de donde y = -1

z-2 = 0, de donde z = 2. **El punto pedido es D(4,-1,2).**

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo Junio 2012 común

[2’5 puntos] Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \dfrac{a.sen(x) - x.e^x}{x^2}$ es finito, calcula el valor de a y el de dicho límite.

Solución

$\lim_{x\to 0} \dfrac{a.sen(x) - x.e^x}{x^2} = \dfrac{0}{0}$, Le aplicamos la regla de L’Hôpital (L’H. Si f(x) y g(x) son continuas en [a – r, a + r], derivables en (a – r, a + r), con f(a) = g(a) = 0, entonces si existe $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, se verifica que $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. La regla se puede reiterar y también es cierta cuando salga ∞/∞, y cuando $x \to \infty$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{a.sen(x) - x.e^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{a.cos(x) - (e^x + x.e^x)}{2x} = \frac{a-1}{0}$$

Como dicen que existe el límite tendríamos que tener 0/0, para poder seguir aplicándole L’H, de donde a – 1 = 0, **por tanto a = 1**, y tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{cos(x) - (e^x + x.e^x)}{2x} = \left(\frac{0}{0}; L'H\right) = \lim_{x\to 0} \frac{-sen(x) - (e^x + e^x + x.e^x)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Ejercicio 2 opción B, modelo Junio 2012 común

Sea la función f definida por $f(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$ para $x \neq -1$ y $x \neq 1$.

(a) [1’25 puntos] Halla una primitiva de f.
(b) Calcula el valor de k para que el área del recinto limitado por el eje de abscisas y la gráfica de f en el intervalo [2,k] sea ln(2), donde ln denota el logaritmo neperiano.

Solución

(a)
Halla una primitiva de f.

Una primitiva es $F(x) = \int \dfrac{2}{x^2-1}.dx$

Descomponemos $\dfrac{2}{x^2-1}$ en suma de fracciones simples:

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

Igualando numeradores tenemos: $2 = A(x+1) + B(x-1)$

Para $x = -1 \to 2 = B(-2) \to B = -1$.
Para $x = 1 \to 2 = A(2) \to A = 1$.

$$F(x) = \int \frac{2}{x^2-1}.dx = \int \frac{2}{(x-1)(x+1)}.dx = \int \frac{A}{(x-1)}.dx + \int \frac{B}{(x+1)}.dx = \int \frac{1}{(x-1)}.dx + \int \frac{-1}{(x+1)}.dx =$$
$$= \ln|x-1| - \ln|x+1| + K.$$

(b)
Calcula el valor de k para que el área del recinto limitado por el eje de abscisas y la gráfica de f en el intervalo [2,k] sea ln(2), donde ln denota el logaritmo neperiano.

Observamos que en el intervalo [2,k], f(x) > 0 porque f(2) = 2/3 >0, y el resto de los valores del intervalo son mayores de k.

Área = ln(2) = $\int_2^k \frac{2dx}{x^2-1}$ = [ln|x-1| - ln|x+1| $]_2^k$ = (ln(k-1) – ln(k+1)) - (ln(1) – ln(3)) =

= $\ln\left(\frac{k-1}{k+1}\right)$ + ln(3) . Igualando tenemos $\ln\left(\frac{k-1}{k+1}\right)$ = ln(2) – ln(3) = $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$. De esta igualdad logarítmica tenemos $\left(\frac{k-1}{k+1}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)$, multiplicando en cruz:

3k-3 = 2k+2, **de donde k = 5**.

Ejercicio 3 opción B, modelo Junio 2012 común

Considera el sistema de ecuaciones

$$x + y + z = \lambda+1$$
$$3y + 2z = 2\lambda+3$$
$$3x + (\lambda-1)\,\lambda + z = \lambda$$

(a) [1 punto] Resuelve el sistema para λ = 1.
(b) [1 punto] Halla los valores de λ para los que el sistema tiene una única solución.
(c) [0'5 puntos] ¿Existe algún valor de λ para que el sistema admita la solución (-1/2,0,1/2)?

Solución

Resolvemos primero el apartado (b)

(b)
Halla los valores de λ para los que el sistema tiene una única solución.

La matriz de los coeficientes del sistema es A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 3 & 2 & 2\lambda+3 \\ 3 & \lambda-1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

Si det(A) = |A| $\neq$ 0, rango(A) = rango(A^*) = 3 = nº de incógnitas. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & \lambda-1 & 1 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix}\text{Adjuntos}\\ \text{primera}\\ \text{columna}\end{matrix}$ = (1)(3-2λ+2) – 0 +(3)(2-3) = (-2λ+5) - 3 = -2λ+2 $\neq$ 0,

luego **el sistema tiene solución única si λ $\neq$ 1**.

(a)
Resuelve el sistema para λ = 1.

Hemos visto en el apartado anterior que si λ **= 1**, |A| = 0 luego rango(A) < 3

Si λ **= 1**, A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y A^* = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, tenemos rango(A)=2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix}\text{Adjuntos}\\ \text{tercera}\\ \text{fila}\end{matrix}$ = (3)(5-6) - 0 + (1)(3) = -3 + 3 = 0,tenemos rango(A^*) = 2

Como rango(A)= rango(A^*)= 2 < nº incógnitas, por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.

Como el rango es 2, sólo necesitamos 2 ecuaciones. (Tomo las del menor distinto de cero de la matriz A, es decir la 1ª y la 2ª.

x + y + z = 2
3y + 2z = 5. Tomo **z = a** $\in$ R

x + y = 2 - a
3y = 5 – 2a, de donde **y = 5/3 – 2a/3**. Entrando en la otra ecuación

x + (5/3 – 2a/3) = 2 – a, de donde **x =** 2 – 5/3 + a(2/3 – 1) = **1/3 –a/3**
Solución (x,y,z) = (1/3 –a/3, 5/3 – 2a/3, a) con a $\in$ R.

(c)
¿Existe algún valor de λ para que el sistema admita la solución (-1/2,0,1/2)?
Me piden ver si es cierto el sistema
-1/2 + 0 + 1/2 = λ+1, de donde λ = -1
0 + 2(1/2) = 2λ+3, de donde λ = -1
3(-1/2) + 0 + 1/2 = λ, de donde λ = -1
Por tanto para λ = -1, el sistema admita la solución (-1/2,0,1/2).

Ejercicio 4 opción B, modelo Junio 2012 común

Sean las rectas “r” y “s” dadas por: $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 6 \\ x \quad + \quad z = 3 \end{cases}$, $\qquad s \equiv$ (x-1)/(-1) = (y+1)/6 = z/2

(a) [1’25 puntos] Determina el punto de intersección de ambas rectas.
(b) [1’25 puntos] Calcula la ecuación general del plano que las contiene.

Solución

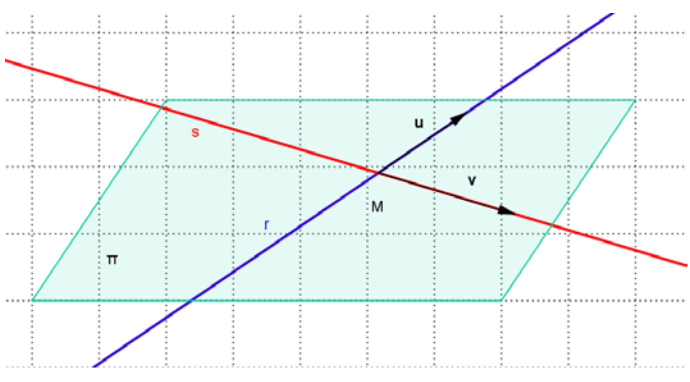
Antes de resolver el problema, haremos un pequeño dibujo y pondremos ambas rectas en la ecuación paramétrica con un parámetro distinto cada una.

De la recta “s” tenemos el punto B(1,-1,0) y el vector director **v** = (-1,6,2).

$s \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = -1 + 6\mu \\ z = 0 + 2\mu \end{cases}$, con $\mu \in$ R

Para poner “r” en paramétricas tomamos z = $\lambda \in$ R, con lo cual x = 3 - λ, y entrando en la otra ecuación tenemos (3 - λ) + y - λ = 6, de donde y = 3 + 2λ.

$r \equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = 0 + \lambda \end{cases}$, con $\lambda \in$ R. Un punto es A(3,3,0) y un vector director es **u** = (-1, 2,1).



(a)
Determina el punto de intersección de ambas rectas.

Para determinar el punto de corte M, igualamos miembro a miembro las rectas y resolvemos el sistema en λ y μ.
$x = x \rightarrow 3 - \lambda = 1 - \mu$
$y = y \rightarrow 3 + 2\lambda = -1 + 6\mu$
$z = z \rightarrow \quad \lambda = 2\mu$

Con la 2ª y 3ª tenemos $3 + 4\mu = -1 + 6\mu \rightarrow 4 = 2\mu \rightarrow$ **$\mu = 2$ y $\lambda = 4$**.
Comprobamos que verifica la 1ª ecuación $3 - \lambda = 1 - \mu \rightarrow 3 - 4 = 1 – 2$, lo cual es cierto, por tanto el punto de corte de las rectas es $M(3 – (4),3 + 2(4),(4)) = M(-1,11,4)$

(b)
Calcula la ecuación general del plano que las contiene.

Para un plano "π" necesitamos un punto, el M, y dos vectores independientes, el **u** y el **v**.
El plano π tiene de ecuación $0 = \det(\mathbf{MX},\mathbf{u},\mathbf{v})$
$M(-1,11,4)$, $\mathbf{u} = (-1,2,1)$, $\mathbf{v} = (-1,6,2)$.

$$0 = \det(\mathbf{MX},\mathbf{u},\mathbf{v}) = \begin{vmatrix} x+1 & y-11 & z-4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{c} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = (x+1)(-2) – (y-11)(-1) + (z-4)(-4) =$$

$= -2x + y - 4z + 3 = 0$
El plano pedido es $\pi \equiv -2x + y - 4z + 3 = 0$